

Elements de logique 1.1.1 Assertions Exemples 1.1 1.N*, n >= 2 et E1,E2,...,En des ensembles.-- 1
 L'implication $P \Rightarrow Q$ se lit aussi : si P alors Q. -- Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit : ou encore : 1.1 Elements de
 logique 7 1.1.3 Raisonnement par l'absurde On cherche a montrer qu'une assertion P est vraie, pour
 cela, on suppose que P est fausse et on montre que cela entraine une contradiction avec une assertion
 Q qu'on sait deja qu'elle est vraie. Predicats Un predicat est un enonce mathematique qui contient (au
 moins) une variable d'un certain ensemble tel que lorsqu'on attribue une valeur a chacune des variables
 y figurant, on obtient une assertion. E) $P(x)$ * quiselit, * qui, par definition, est vraie lorsqu'il existe (au
 moins) un element a de E tel que l'assertion $P(a)$ soit vraie ; le symbole Q) et l'equivalence $(P \Leftrightarrow Q)$ qui
 sont definies par la table de verite suivante : 6 Chapitre 1. l'analyse : on suppose que l'on a une solution
 du probleme et on cherche a en deduire toutes les proprietes possibles de cette solution, l'objectif etant
 d'essayer de l'identifier au mieux ; ? Remarque 1.6 L'assertion $(\exists x \in E) P(x)$ se lit : il existe un et un seul element a de E tel que l'assertion $P(a)$ soit vraie. > n'est pas une assertion car sa valeur de
 verite depend de la valeur de n. Conventions Si P est une assertion : --
 onecrit laplupart dutempsou aulieu de ou. On appelle assertion (ou proposition) un enonce mathematique,
 sans variable, auquel on peut attribuer une valeur de verite (vrai : V (ou 1) ou faux : F (ou 0)). Elements
 de logique et vocabulaire ensembliste Quantificateurs Soit $P(x)$ un predicat a une variable x d'un
 ensemble E. On peut alors construire : -- l'assertion : $(\forall x \in E) P(x)$? Exemple 1.6 Prouver que toute fonction f
 definie sur $\mathbb{R}$ s'ecrit de maniere unique comme somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h.
 . Elements de logique et vocabulaire ensembliste $P \vee Q$ $P \wedge Q$ $P \Rightarrow Q$ $P \Leftrightarrow Q$ VVVVVV VFFVFF FVFVVF
 FFFFVV Remarques 1.1 1.E) $P(x)$ * quiselit, * qui, par definition, est vraie lorsque l'assertion $P(a)$ est vraie
 pour tout element a de E ; le symbole Q, c'est-a-dire on suppose > (i.e. P est vraie et Q est fausse). 1.1.7
 Quantificateurs Ensembles -- Un ensemble E est une collection d'objets, chaque objet x de E est dit un
 element de E et on ecrit $x \in E$. -- L'ensemble vide est celui qui ne contient aucun element et il est note $\emptyset$ /
 . N tels que $(1 + \dots + 1) = n$ 1.2 Operations sur les ensembles 1.2.1 Inclusion Soient E et F deux ensembles
 quelconques. -- On appelle difference de E et F, l'ensemble, note $E \setminus F$, des elements qui sont dans E
 mais pas dans F ; on a donc $x \in E \setminus F$ si et seulement si $x \in E$ et $x \notin F$. 1.2.5 Couple, produit cartesien A partir de deux elements x,y, on peut
 construire le couple (x,y) avec, si x_1, y_1, x_2 et y_2 sont des elements, la propriete fondamentale : $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. A une assertion P, on peut associer une negation notee non P ou $\neg P$ qui est definie
 par la table de verite suivante : $P \quad \neg P$ VF FV Definition 1.3 -- Connecteurs logiques. -- $P \Rightarrow Q$ est
 toujours vraie sauf dans le cas ou P est vraie et Q est fausse. Exemple 1.4 Cherchons les solutions
 reelles de l'equation : $(E) x^3 - 9x = 0$ 1.1.5 Raisonnement par disjonction des cas Exemple 1.5 --
 Raisonnement par disjonction des cas. x - 2 l est une assertion vraie. Proposition 1.2 o Principe de non-
 contradiction : La proposition : $(P \wedge \neg P)$ est fausse. methode directe : on suppose que P est vraie et on
 montre que Q est vraie. methode par contraposee : on suppose que Q est fausse et on montre que P est
 fausse. Exemple 1.3 On rappelle que 2 est un nombre irrationnel. > est un predicat dont la variable n
 appartient a $\mathbb{N}$. 2. Remarque 1.7 L'ordre des quantificateurs de nature differente est essentiel. > est une
 assertion fausse. $3 = 5 \Rightarrow$ est une assertion vraie. $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$; $[(P \vee Q) \wedge R] \Leftrightarrow [(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)]$; $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$; $[(P \wedge Q) \vee R] \Leftrightarrow [(P \vee R) \wedge (Q \vee R)]$. Soient a et b deux
 entiers relatifs. 1.2.3 Intersection et reunion Soient E et F deux ensembles. 1.2.4 Difference et difference

symétrique Exercice 1.2 Soient E et F deux ensembles. o $E \times F = F \times E$, lorsque E et F sont distincts et non vides. > n'est pas une assertion. -- de même on écrit > au lieu de <. Propriétés 1.3 Soient P , Q et R trois assertions. [(PetQ)etR][Pet(QetR)]; [(P ou Q) ou R] [P ou (Q ou R)]. méthode par l'absurde : à voir bien tot. Il se déroule en deux étapes : ?>> est appelé quantificateur universel ; -- l'assertion : (?x ?E, P(x) >> Montrer une assertion de la forme > est appelé quantificateur existentiel. QuediredeE etF siP(E)?P(F)? Remarque 1.10 ; E?0/=E; ; E?E=E; ; E?F=F?E; E?0/=0/ E?E=E E?F=F?E E?F?EetE?F?F ; E?E?FetF?E?F. Propriétés 1.13 Soient A,B et C trois ensembles. Alors 1. Exercice 1.3 Décrire E x F lorsque E = {1,2} et F = {1,2,3}. -- (x₁,x₂,...,x_n) s'appelle un n-uplet. 1.2 Opérations sur les ensembles 111. 1.2 Connecteurs logiques Définition 1.2 -- Negation. -- Si Pest fausse alors P=>Qest vraie. !(PetQ)(!Pou!Q).(IV) (PQ)[(P=>Q)et(Q=>P)]. Remarque 1.4 Pour montrer P=>Q on a trois méthodes: 1.Exemple 1.1 Soit n ?N. Montrer : n est pair n² est pair. Exemple 1.2 Montrer : 2 ?/ Q. ?R. montrer que : | R) x² + 1 >= 0 >> est vraie. R) x² - 1 >= 0 >> est fausse. L'assertion >est vraie. La négation de est et la négation de est Exercice: Soit n ?N. Exercice 1.1 Soient ?, ?F de E et F par : E ? Montrer que E ?E et x ?/ F.) -- Lorsque F ?et B = CB?. (? est associative) Démonstration. A faire en ex. ? Ainsi, on a : z ?ExF (?x ?E , ?y ?F /z=(x,y)). Remarque 1.15 o Six=y, alors (x,y)=(y,x). -- Si E₁=E₂=...=E_n, E₁x E₂x... E_n est note E_n. Exemple . 1.9 Soit E = {0,1}. Définition 1.1 -- Assertion. Exemples 1.2 1