

عرف المصريون القدماء والبابليون مبرهنات على نسب أضلاع المثلثات المتشابهة لعدة قرون. نظراً لأن مجتمعات ما قبل الإغريقية افترقت إلى مفهوم قياس الزاوية، فقد اقتصرت على دراسة أضلاع المثلثات بدلاً من ذلك. احتفظ الفلكيون البابليون بمخطوطات تفصيلية عن شروق وغروب النجوم، وكسوف الشمس وخسوف القمر، وكلها تتطلب إلماماً بالمسافات الزاوية المقاسة على القبة السماوية. استناداً إلى أحد التفسيرات للوحة المسمارية بليمبتون 322 (حوالي 1900 قبل الميلاد)، أكد البعض أن البابليين القدماء لديهم جدول القواطع. هناك الكثير من الجدل حول ما إذا كان جدول ثلاثيات فيثاغورس، استخدم المصريون شكلاً بدائياً لحساب المثلثات لبناء الأهرامات في الألفية الثانية قبل الميلاد. بردية ريند الرياضية، كتبها الكاتب المصري أحمر (حوالي 1620-1680 قبل الميلاد)، تحتوي على المشكلة التالية المتعلقة بحساب المثلثات: فما هو "سقطه"؟ وبعبارة أخرى، فإن المقدار الذي وجده للسقط هو ظل التمام لزاوية بين قاعدة الهرم ووجهه. العصر الكلاسيكي يقابل وتر الزاوية قوس الزاوية. استخدم علماء الرياضيات اليونانيين والهلنستيين الوتر. باعتبار الدائرة وقوسها، فإن الوتر هو المستقيم الذي يقابل القوس. يمر المُنصِف العمودي للوتر عبر مركز الدائرة ويُنصِف الزاوية. أي: وتر الزاوية $r \times \sin \alpha = 2r$ (حيث r هو نصف قطر الدائرة). وبالتالي تُعرف دالة الجيب أيضاً باسم «نصف الوتر». بسبب هذه العلاقة، كان عدد من المتطابقات والمبرهنات المثلثية المعروفة اليوم معروفة أيضاً لدى علماء الرياضيات الهلنستيين، ولكن في شكل الوتر المكافئ لها. على الرغم من عدم وجود حساب المثلثات في أعمال إقليدس وأرخميدس، بالمعنى الدقيق للكلمة، على سبيل المثال، التقارير الثانية عشرة والثالثة عشرة من الكتاب الثاني لـ «الأصول» هي قوانين جيب التمام للزوايا الحادة والمنفرجة، على التوالي. المبرهنات على أطوال الأوتار هي تطبيقات قانون الجيب. وتعادل مبرهنة أرخميدس عن الأوتار المكسورة الصيغ لجيوب المجموع وفرق الزوايا. للتعويض عن نقص جدول الأوتار، والمعروف الآن باسم متباينة أرسطرخس. يبدو أن أبرخش (180 - 125 ق. م) قام بانتاج أول جدول مثلثي، والذي يُعرف الآن بالتالي باسم أبي حساب المثلثات. كان أبرخش أول من قام بجدولة القيم المقابلة للقوس والوتر لسلسلة من الزوايا. على الرغم من أنه من غير المعروف متى جاء الاستخدام المنهجي لدائرة 360 درجة في الرياضيات، فمن المعروف أن الإدخال المنهجي لدائرة 360 درجة جاء قليلاً بعد تأليف أرسطرخس الساموسي "عن أحجام ومسافات الشمس والقمر" (حوالي 260 ق. م)، يبدو أن الاستخدام المنهجي لدائرة 360 درجة يرجع إلى حد كبير إلى أبرخش وجدول الأوتار الخاص به. قد يكون أبرخش قد أخذ فكرة هذا التقسيم من إيسقلاوس الذي قسم اليوم في وقت سابق إلى 360 جزءاً، قد اقترح تقسيم اليوم من قبل علماء الفلك البابليون. تم تقسيم دائرة البروج إلى اثني عشر برج أو ستة وثلاثين "ديكان". ويرجع ذلك إلى نظام العد الستيني البابلي الذي يتم تقسيم كل درجة إلى ستين دقيقة وتقسم كل دقيقة إلى ستين ثانية. مبرهنة منيلاوس كتب منيلاوس الإسكندري (حوالي 100 م) في ثلاثة كتب العمل "Sphaerica". في الكتاب الأول، وضع أساساً للمثلثات الكروية شبيهة بالأساس الإقليدي للمثلثات المستوية. صاغ مبرهنة التي هي بدون تشابه إقليدي، تتطابق مثلثان كرويان إذا كانت الزوايا المقابلة متساوية، لكنه لم يميز بين المثلثات الكروية المتطابقة والمتناظرة. يطبق الكتاب الثاني من "Sphaerica" الهندسة الكروية على علم الفلك. كما قدم «قاعدة ست كميات» الشهيرة. في وقت لاحق، توسع بطليموس (حوالي 90 - 168 م) على أوتار أبرخش في دائرة في كتابه المجسطي. المجسطي هو في المقام الأول عمل في علم الفلك، ويعتمد علم الفلك على حساب المثلثات. يقدم جدول الأوتار بطليموس أطوال أوتار الدائرة قطرها 120 كدالة لعدد الدرجات n في القوس المقابل للدائرة، من أجل n يتراوح من $1/2$ إلى 180 بزيادات $1/2$. الكتب الثلاثة عشر من المجسطي هي أكثر الأعمال المثلثية تأثيراً وأهمية في جميع العصور القديمة. أثبتت المبرهنة التي كانت محورية في حساب بطليموس للأوتار التي لا تزال تعرف اليوم باسم مبرهنة بطليموس، أن مجموع جداءات الأضلاع المقابلة للرباعي الدائري يساوي جداء أقطار الرباعي. ظهرت حالة خاصة لمبرهنة بطليموس كتقرير 93 في «معطيات إقليدس». تقود مبرهنة بطليموس إلى ما يعادل المتطابقات الأربعة لمجموع وفرق الزوايا لجيب وجيب التمام التي تعرف اليوم بصيغ بطليموس، على الرغم من أن بطليموس نفسه استخدم الأوتار بدلاً من الجيب وجيب التمام. اشتق بطليموس أيضاً ما يعادل صيغة نصف الزاوية: $\sin \cos$ استخدم بطليموس هذه النتائج لإنشاء جداوله المثلثية، ولكن لا يمكن تحديد ما إذا كانت هذه الجداول مشتقة من عمل أبرخش. لم يتبق جداول أبرخش ولا جداول بطليموس حتى يومنا هذا، اكتشف فيثاغورس العديد من الخصائص التي تطبق الآن على الدوال المثلثية. $h^2 = b^2 + p^2$ هي تمثيل للمتطابقة المثلثية الأساسية $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. الطول 1 هو وتر المثلث القائم، وأطوال ساقي المثلث تساوي $\sin(x)$ و $\cos(x)$ مع كون x إحدى الزوايا غير القائمة. ومن هذا المنطلق، المتطابقة التي يقوم عليها حساب المثلثات هي مبرهنة فيثاغورس. الرياضيات الهندية الأعمال المؤثرة من القرن الرابع إلى

الخامس، والمعروفة باسم «سِيْدْهَانْتَات» (جمع «سِيْدْهَانْتَا») (التي كان هناك خمسة منها، وعُرِفَتْ أيضًا جيب التمام، وسهم الزاوية (1 - جيب تمامها)، ودالة الجيب العكسية. بعد ذلك بفترة وجيزة، قام عالم رياضيات وعالم فلك هندي آخر، تحتوي سِيْدْهَانْتَات وأريابهاتِيَا على الجداول القديمة الباقية لقيم الجيب وقيم السهم، في فترات من 0 درجة إلى 90 درجة، استخدموا الكلمات التالية: «جيا» للجيب، و«كوجيا» لجيب التمام، و«أوتكراما جيا» للسهم، في القرن السابع، أنتج بهاسكارا الأول صيغة لحساب جيب الزاوية الحادة دون استخدام الجدول. كما قدم الصيغة التقريبية التالية لجيب الزاوية x ، التي كان خطأها النسبي أقل من 10^{-1} من $\sin 16 \displaystyle \sin x \approx \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}$ ، $\forall x \in [0, \pi]$ في وقت لاحق من القرن السابع، أعاد براهماغوبتا تطوير الصيغة $\sin \cos \sin \displaystyle 1 - \sin x = \cos^2(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2} - x)$ وصيغة الاستيفاء لبراهماغوبتا لحساب قيم الجيب. في القرن الثاني عشر، طور بهاسكارا الثاني حساب المثلثات الكروية، كان بهاسكارا الثاني واحد من الأوائل الذين اكتشفوا النتائج المثلثية $\sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) = \sin a \cos b$ و $\sin \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) = \sin a \sin b$ مثل: $\sin \cos \sin$ خطّ مادهافا (حوالي 1400) خطوات واسعة ومبكرة في تحليل الدوال المثلثية ومتسلسلاتها اللانهائية. ووضع مفاهيم متسلسلة القوى ومتسلسلة تايلور، وأنتج متسلسلة القوى لكل من الجيب وجيب التمام والظل ودالة الظل العكسية. باستخدام تقريب دالتي الجيب وجيب التمام بواسطة متسلسلة تايلور، كما قدّم متسلسلة القوى للثابت π والزاوية ونصف القطر ومحيط الدائرة بدلالة الدوال المثلثية. طالع متسلسلات مادهافا. الرياضيات الصينية في الصين، ترجمت جدول الجيب لأريابهاتا إلى الكتاب الرياضي الصيني كايوان تشانجنيغ، الذي تم تأليفه في 718 م خلال عهد أسرة تانغ الحاكمة. على الرغم من أن الصينيين برعوا في مجالات أخرى من الرياضيات مثل الهندسة الفراغية، ومبرهنة ذات الحدين، إلا أن الأشكال القديمة لحساب المثلثات لم تكن محل تقدير على نطاق واسع كما كان الحال في العالم اليوناني والهيلينستي والهندي والإسلامي. بدلاً من ذلك، استخدم الصينيون الأوائل بديلاً تجريبياً يُعرف باسم «تشونغ تشا»، بينما كان الاستخدام العملي لحساب المثلثات المستوي في استخدام الجيب والظل والقاطع معروفاً. ومع ذلك، حيث بدأ علماء الرياضيات الصينيون في الإصرار أكثر على الحاجة إلى حساب المثلثات الكروية في علوم التقويم والحسابات الفلكية. اكتشف شين كوا صيغة تُقَرَّب طول قوس الدائرة s باعتبار قطر الدائرة d ، والطول c للوتر المقابل للقوس: $\displaystyle s = c + \frac{2c^3}{d^2}$. كتب «سال ريسيفو» أن عمل شين كوا في أطوال أقواس الدوائر قدم الأساس لعلم المثلثات الكروي الذي طوره عالم الرياضيات والفلكي غوا شوجينغ (1231-1316) في القرن الثالث عشر. كما ذكر المؤرخان «ل. غوشيه» و جوزيف نيدام، استخدم غو شوجينغ حساب المثلثات الكروية في حساباته لتحسين نظام التقويم وعلم الفلك الصيني. العصر الذهبي للحضارة الإسلامية صفحة من كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة للعالم محمد بن موسى الخوارزمي (820 م) تمت ترجمة الأعمال السابقة في وقت لاحق وتوسيعها في العالم الإسلامي في العصور الوسطى من قبل علماء الرياضيات المسلمين من أصول فارسية وعربية في الغالب، الذين نصّوا عدداً كبيراً من المبرهنات التي حررت موضوع حساب المثلثات من الاعتماد على رباعي الأضلاع الكامل، وبحسب إدوارد ستيوارت كينيدي، فبعد هذا التطور في الرياضيات الإسلامية «ظهر حساب المثلثات الحقيقي الأول، بمعنى أنه عندها فقط أصبح موضوع الدراسة هو المثلث الكروي أو المستوي، كما عُرِفَت الطرق التي تتعامل مع المثلثات الكروية، ولا سيما طريقة مينيلوس الإسكندري، ومع ذلك، من حيث المبدأ، باستخدام جدول الأوتار و مبرهنة مينيلوس، استخدم الفلكيون في البداية طريقة مينيلوس لحساب أماكن القمر والنجوم، على الرغم من أن هذه الطريقة أثبتت أنها خرقاء وصعبة. من خلال تطبيق مبرهنة مينيلوس، ولكن فقط إذا كانت الأضلاع الخمسة الأخرى معروفة. لمعرفة الوقت من ارتفاع الشمس، على سبيل المثال، كانت هناك حاجة إلى تطبيقات متكررة مبرهنة مينيلوس. بالنسبة لعلماء الفلك المسلمين في العصور الوسطى، كان هناك تحدٍّ واضح لإيجاد أبسط طريقة مثلثية. في أوائل القرن التاسع الميلادي، أنتج محمد بن موسى الخوارزمي جداول دقيقة لدوال الجيب والجيب التمام ويقال أنه أنتج أول جدول للظل. في حوالي عام 830، اكتشف أحمد بن عبد الله المروزي ظل التمام، وأنتج جداول الظل وظل التمام. اكتشف محمد بن جابر البتاني (853-929) الدوال المقلوية: القاطع وقاطع التمام، وأنتج الجدول الأول لقواطع التمام لكل درجة من 1° إلى 90°. بحلول القرن العاشر الميلادي، في عمل أبي الوفاء البوزجاني، كان علماء الرياضيات المسلمون يستخدمون جميع الدوال المثلثية الستة. كان أبو الوفاء لديه جداول الجيوب بزيادات 0.25 درجة، إلى 8 أرقام عشرية بعد الفاصلة، وجداول دقيقة للظل. طور أيضًا الصيغة المثلثية التالية: $\sin \sin \cos \displaystyle \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ «إذ أردنا ذلك، فما حصل فهو نصف جيب القوس.

كما صاغ البوزجاني مطابقات مجموع وفرق الزاوية المقدمة بالبراهين الكاملة:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \{\sqrt{\sin^2 \alpha - (\sin \alpha \sin \beta)^2} \pm \sqrt{\sin^2 \beta - (\sin \alpha \sin \beta)^2}\} \sin \cos \cos \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

{ بالنسبة للمطابقة الثانية، ينص النص على ما يلي: «ضربنا جيب كل واحد منهما في جيب تمام الآخر، فما حصل جمعناهما إن أردنا جيب مجموع القوسين، وأخذنا تفاضلهما إن أردنا جيب تفاضلهما. اكتشف أيضاً قانون الجيب للمثلثات الكروية: $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$ ». أجرى الفلكي العربي المصري ابن يونس العديد من الحسابات المثلثية الدقيقة وبرهن المتطابقة المثلثية التالية: $\cos \cos$ وقد أثرت مخطوطته تلك تأثيراً قوياً على الرياضيات الأوروبية، تم تطوير طريقة التثليث لأول مرة من قبل علماء الرياضيات المسلمين، الذين طبقوها على الاستخدامات العملية مثل مسح الأراضي والجغرافيا الإسلامية،