

Chapitre IV : Cinématique La cinématique est l'étude des mouvements des liquides sans tenir compte des forces qui lui donne naissance. On étudie seulement la relation entre les positions des particules fluides et le temps. Définitions : Systèmes de références : Pour étudier un fluide on peut utiliser deux systèmes de références : Méthode de Lagrange : Cette méthode consiste à individualiser une particule et la suivre dans son mouvement, On procède donc comme pour la cinématique d'un point matériel, c'est-à-dire qu'on exprime les coordonnées d'un point M de la masse fluide en fonction du temps et de la position initiale du point considéré : $x = x(x_0, y_0, z_0, t)$ $y = y(x_0, y_0, z_0, t)$ $z = z(x_0, y_0, z_0, t)$ $M(0, 0, 0)$ x_0, y_0, z_0 sont les variables de Lagrange. Méthode d'Euler : Cette méthode consiste à considérer un point fixe de l'espace et à étudier en fonction de temps ce qui se passe en ce point. On déterminera donc, en fonction du temps la vitesse des particules fluides qui viennent successivement passer par ce point. La vitesse étant déterminé par ces trois composantes (u,v,w) sur les trois axes OX,OY,OZ. On disposera donc des trois équations suivantes : u,v,w sont les variables d'Euler. $(u, v, w) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ Trajectoires, ligne de courant, ligne d'émission : Trajectoire : Les positions successives d'une particule fluide au cours du temps décrivent une courbe qu'on appelle Trajectoire. On l'obtient expérimentalement en immergeant dans un fluide des granules colorés de même densité que celle du fluide, chaque granulé dessine alors la trajectoire de la particule fluide qui le contient. Ligne de courant : C'est une ligne tangente en chacun de ces points au vecteur vitesse, à l'instant considéré. Selon cette propriété on peut écrire l'équation différentiel des lignes de courant : $V \cdot \nabla = w \frac{dz}{dx} - v \frac{dy}{dx} + u \frac{dx}{dx}$ La surface formée par une infinité de lignes de courant est appelée surface de courant, cette surface s'appuie à un instant donnée sur une courbe donnée « C ». La vitesse en un point quelconque de cette surface est évidemment situé à l'instant considéré dans un plan tangent, de telle sorte que : L'équation différentielle de la surface de courant sera : Pour différentes valeurs de K on aura différentes surfaces. Si la courbe C est fermée la surface dessine un tube de courant, le fluide à l'intérieur du tube est un filet de courant, ou un filet liquide dans le cas des liquides. $F(x, y, z, t) = K = 0$ Ligne d'émission : C'est une ligne constituée par l'ensemble des positions occupées, à un instant donné par les particules passées en un point donné aux instants successifs antérieurs. Equation de continuité : L'équation basée sur le principe de conservation de masse est dite Equation de continuité. Pour un écoulement dans une conduite, la quantité de fluide par unité de temps est constante Figure (IV. 1). Ecoulement entre deux sections Si on a un écoulement à travers un conduit fermé (1-2), la masse qui entre est égale à la masse qui sort par unité de temps. $\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$ $\rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$ Equation de continuité en 3-D : Considérant un élément fluide de dimensions dx,dy,dz. Figure (IV.2). Ecoulement à travers un élément fluide. Cette équation peut s'écrire sous la forme : Si la vitesse dans une section (Ω) est uniforme et normale à cette section, l'équation de continuité peut se mettre sous la forme suivante : Figure (IV.3). Ecoulement à travers un élément fluide à section variable. ds est la distance parcourue par le flux, Ω est la section d'écoulement. Le débit s'écrit à l'instant t : $Q = \int_{\Omega} \rho \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ Le volume qui entre à travers la section Ω pendant le temps « dt » est égale à « Qdt » et celui qui sort pendant le même temps par la section est

de : La différence entre le volume entrant et celui sortant est : « » c'est l'accroissement du volume entre les deux sections. Puisqu'on suppose un liquide est incompressible ($\rho = \text{constant}$) , l'accroissement de volume est égale à l'accroissement de la section par ds : « » on aura donc : c'est l'autre forme de

l'équation de continuité $\rho \frac{dV}{dt} = \rho \frac{dQ}{dt} = \rho \frac{d(S \cdot ds)}{dt} = \rho \frac{dS}{dt} ds = \rho \frac{dS}{dt} ds = 0$

Vitesses et accélérations : Soit la vitesse en n'importe quel point du liquide, (u,v,w) sont les composantes du vecteur vitesse suivant les trois directions (OX,OY,OZ). Les composantes de la vitesse sont fonction des coordonnées de l'espace et du temps : Donc: Soit (ax ,ay ,az) les composantes de l'accélération suivant les trois axes, sachant que l'accélération est la dérivé totale de la vitesse par rapport au temps : Mais :

$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} (u, v, w) = \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$

3 2 1 w f x y z t v f x y z t u f x y z t V u² v² w² t u dt dz z u dt dy y u dt dx x u dt du ax ay az w dt dz v dt dy u dt dx , , On aura donc: Accél. Convectives Accél. Locales Pour un écoulement permanent : Le vecteur accélération est :

$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$

tw zw w yw v xw u dt dw a tv zv w y v v x v u dt dv a tu zu w yu v xu u dt du a z y x 0 0 t w t v t u t V A a i a j a k x y z A ax ay az

Accélération locale : Elle est définie comme étant le taux d'accroissement de la vitesse, à un point donné, de la vitesse par rapport au temps. Accélération convective : C'est le taux de l'accroissement de la vitesse due au changement de la position des particules fluides