1 Elements de logique 1.1.1 Assertions Exemples 1.1 1.N*, n >= 2 et E1,E2,...,En des ensembles.–– L'implication P => Q se lit aussi : si P alors Q. –– LorsqueP=>Qestvraie,ondit:ouencore:.1.1 Elements de logique 7 1.1.3 Raisonnement par l'absurde On cherche a montrer qu'une assertion P est vraie, pour cela, on suppose que P est fausse et on montre que cela entraine une contradiction avec une assertion Q qu'on sait deja qu'elle est vraie.Predicats Un predicat est un enonce mathematique qui contient (au moins) une variable d'un certain ensemble tel que lorsqu'on attribue une valeur a chacune des variables y figurant, on obtient une assertion.E) P(x) * quiselit, * qui, par definition, est vraie lorsqu'il existe (au moins) un element a de E tel que l'assertion P(a) soit vraie ; le symbole Q) et l'equivalence (P Q) qui sont definies par la table de verite suivante : 6 Chapitre 1.l'analyse : on suppose que l'on a une solution du probleme et on cherche a en deduire toutes les proprietes possibles de cette solution, l'objectif etant d'essayer de l'identifier au mieux ; ?Remarque1.6 L'assertion(?!x?E)P(x)selitetelleest vraie lorsqu'il existe un et un seul element a de E tel que l'assertion P(a) soit vraie.>n'est pas une assertion car sa valeur de verite depend de la valeur de n. Conventions Si P est une assertion : –– onecritlaplupartdutempsouaulieudeou.On appelle assertion (ou proposition) un enonce mathematique, sans variable, auquel on peut attribuer une valeur de verite (vrai : V (ou 1) ou faux : F (ou 0)).Elements de logique et vocabulaire ensembliste Quantificateurs Soit P(x) un predicat a une variable x d'un ensemble E. On peut alors construire : –– l'assertion : (?x ?Exemple 1.6 Prouver que toute fonction f definie sur R s'ecrit de maniere unique comme somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h. .Elements de logique et vocabulaire ensembliste P Q PetQ PouQ P=>Q PQ VVVVVV VFFVFF FVFVVF FFFFVV Remarques 1.1 1.E) P(x) * quiselit, * qui, par definition, vraie lorsque l'assertion P(a) est vraie pour tout element a de E ; le symbole Q, c'est–a–dire on suppose >(i.e. P est vraie et Q est fausse).1.1.7 Quantificateurs Ensembles –– Un ensemble E est une collection d'objets, chaque objet x de E est dit un element de E et on ecrit x?E.–– L'ensemble vide est celui qui ne contient aucun element et il est note 0/ .N tels que (1+ 1.2 Operations sur les ensembles 1.2.1 Inclusion Soient E et F deux ensembles quelconques.–– On appelle difference de E et F, l'ensemble, note E\F, des elements qui sont dans E mais pas dans F; on a donc x ?1.2.5 Couple, produit cartesien A partir de deux elements x,y, on peut construire le couple (x,y) avec, si x1,y1,x2 et y2 sont des elements, la propriete fondamentale : (x1,y1) = (x2,y2) (x1 = x2 et y1 = y2).AuneassertionP,onpeutassociersanegationnoteenonPou!Petqui est definie par la table de verite suivante : P !P VF FV Definition 1.3 –– Connecteurs logiques.–– P => Q est toujours vraie sauf dans le cas ou P est vraie et Q est fausse.Exemple 1.4 Cherchons les solutions reelles de l'equation : (E) x3 −9x = 0 1.1.5 Raisonnement par disjonction des cas Exemple 1.5 –– Raisonnement par disjonction des cas.x − 2 l est une assertion vraie.Proposition 1.2 o Principe de non–contradiction : La proposition : (P et !P) est fausse.methode directe : on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.methode par contraposee : on suppose que Q est fausse et on montre que P est fausse.Exemple 1.3 On rappelle que 2 est un nombre irrationnel.> est un predicat dont la variable n appartient a N. 2.Remarque 1.7 L'ordre des quantificateurs de nature differente est essentiel.> est une assertion fausse. 3 = 5 >> est une assertion vraie.[Pet(QouR)][(PetQ)ou(PetR)]; [(P ou Q) et R] [(P et R) ou (Q et R)].[Pou(QetR)][(PouQ)et(PouR)]; [(P et Q) ou R] [(P ou R) et (Q ou R)].Soient a et b deux entiers relatifs.1.2.3 Intersection et reunion Soient E et F deux ensembles.1.2.4 Difference et difference

symetrique Exercice 1.2 Soient E et F deux ensembles.o E xF = F xE, lorsque E et F sont distincts et non vides.> n'est pas une assertion.−− de meme on ecrit > au lieu de >.Proprietes 1.3 Soient P , Q et R trois assertions.[(PetQ)etR][Pet(QetR)]; [(P ou Q) ou R] [P ou (Q ou R)].methode par l'absurde : a voir bien tot.Il se deroule en deux etapes : ?>> est appele quantificateur universel ; −− l'assertion : (?x ?E, P(x) >> Montrer une assertion de la forme > est appele quantificateur existentiel.QuediredeE etF siP(E)?P(F)?Remarque 1.10 ; E?0/=E; ; E?E=E; ; E?F=F?E; E?0/=0/ E?E=E E?F=F?E E?F?EetE?F?F ; E?E?FetF?E?F.Proprietes1.13 SoientA,BetCtroisensembles.Alors 1.Exercice 1.3 Decrire E xF lorsque E = {1,2} et F = {1,2,3}.−− (x1,x2,...,xn) s'appelle un n−uplet.1.2 Operations sur les ensembles 111.1.2 Connecteurs logiques Definition1.2−−Negation.−− SiPestfaussealorsP=>Qestvraie.!(PetQ)(!Pou!Q).(IV) (PQ)[(P=>Q)et(Q=>P)].Remarque1.4 PourmontrerP=>Qonatroismethodes: 1.Exemple 1.1 Soit n ?N. Montrer : n est pair n2 est pair.Exemple 1.2 Montrer : 2 ?/ Q. ?R. montrer que : I R) x2 + 1 >= 0 >> est vraie.R) x2 −1 >= 0 >> est fausse.L'assertion>estvraie.La negation de est et la negation de est Exercice:Soitn?N.Exercice 1.1 Soient ?,?F de E et F par : E ?Montrer que E ?E et x ?/ F.) −− Lorsque F ?et B = CB?.(? est associative) Demonstration.A faire en ex. ?Ainsi, on a : z?ExF (?x?E , ?y?F /z=(x,y)).Remarque1.15 o Six=y,alors(x,y)=(y,x).−− SiE1 =E2 =...=En,E1xE2x...En estnoteEn.Exemple 1.9 Soit E = {0,1}.Definition 1.1 −− Assertion.Exemples 1.2 1.

Summarized by © lakhasly.com