

إلى جانب بعض الخواص المشتركة للمتتابعات. لعلنا نتذكر أن المتتابعة في الرياضيات هي قائمة مرتبة من الحدود. سنركز على المتتابعات العددية. تتضمن المتتابعات الشائعة الأعداد الصحيحة واحداً واثنين وثلاثة وأربعة وهكذا، والأعداد المربعة واحداً وأربعة وتسعة و١٦ وهكذا، بالإضافة إلى العديد من الأعداد الأخرى المتعارف عليها. فعلى سبيل المثال، وهذا فارق رئيسي بين متتابعة أعداد ومجموعة أعداد. سنركز على نوعين من المتتابعات؛ المتتابعة الحسابية هي التي يمكن الحصول فيها على كل حد من الحد السابق بإضافة الفرق المشترك (أساس المتتابعة الحسابية) د. تكون المتتابعة حسابية إذا كان ح ن زائد واحد يساوي ح ن زائد د؛ حيث ح ن هو الحد العام ون هو أي عدد طبيعي. وسيكون ح ن زائد واحد هو الحد الذي يلي هذا. وبطرح ح ن من طرفي هذه المعادلة، فإنه يمكن إعادة كتابتها كما هو موضح. الحد الأول في هذه المتتابعة الذي يرمز له ب ح واحد يساوي ثلاثة، ويمكننا إثبات أن هذه المتتابعة هي متتابعة حسابية بالنظر إلى الفرق بين أزواج حدود متتالية. بطرح الحد الأول من الحد الثاني، نحصل على تسعة ناقص ثلاثة، ح ثلاثة ناقص ح اثنين يساوي ستة أيضاً. وعندما نطرح الحد الثالث، نحصل أيضاً على الناتج ستة. ٢١ لها فرق مشترك يساوي ستة، من المهم أن نلاحظ أن الفرق المشترك قد يكون سالباً، سيكون كل حد من المتتابعة أقل من الحد الذي يسبقه. المتتابعة الهندسية هي التي يمكن الحصول فيها على كل حد من الحد السابق بالضرب في النسبة المشتركة (أساس المتتابعة الهندسية) ر. تكون المتتابعة هندسية إذا كان ح ن زائد واحد يساوي ح ن مضروباً في ر. وبقسمة الطرفين على ح ن، فإنه يمكننا كتابة ذلك أيضاً على الصورة ح ن زائد واحد مقسوماً على ح ن يساوي النسبة المشتركة ر. سنفترض أن كل حد من هذه الحدود هو ح واحد، بقسمة ح اثنين على ح واحد، نحصل على ستة مقسوماً على ثلاثة، وعندما نقسم الحد الثالث على الحد الثاني، نحصل أيضاً على الناتج اثنين. نحصل على الناتج اثنين أيضاً عند قسمة ح أربعة على ح ثلاثة. يعني هذا أن النسبة المشتركة لدينا تساوي اثنين، عند التعامل مع المتتابعات الحسابية، لاحظنا أن كل حد تال يكون إما أكبر أو أصغر من الحد الذي يسبقه. ويعتمد ذلك على إذا ما كان الفرق المشترك موجباً أو سالباً. فيمكن أن تتغير النسبة المشتركة ما بين قيمة موجبة وقيمة سالبة. وهذا يحدث عندما تكون النسبة المشتركة ر سالبة. لها نسبة مشتركة تساوي سالب اثنين. سنتناول إذا ما كانت قائمة مجموعة متتابعات حسابية أم هندسية أم غير ذلك. أي المتتابعات الآتية لا تصنف متتابعة حسابية ولا متتابعة هندسية؟ هل هي (أ) نصف، وهكذا؟ (ب) نصف، سنبدأ باسترجاع ما تعنيه المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية. لكن من المهم ملاحظة أننا نبحث عن متتابعة أو متتابعات ليست من أي من هذين النوعين. تكون المتتابعة حسابية إذا كان ح ن زائد واحد ناقص ح ن يساوي د. الفرق بين الحدود المتتالية هو فرق ثابت. لنتناول الآن إذا ما كان أي من الخيارات المذكورة يحقق هذه الخاصية. بطرح الحد الأول من الحد الثاني في الخيار (أ)، وينطبق هذا أيضاً عند طرح الحد الثاني من الحد الثالث، وعند طرح الحد الثالث من الحد الرابع. يمكننا إذن استنتاج أن المتتابعة: نصفاً، بالتعويض بالحدود المتتالية من الخيار (ب)، نلاحظ أنه لا يوجد فرق مشترك. ينطبق الأمر نفسه على الخيارات (ج) و(د) و(هـ). علينا النظر إلى الخيار (هـ) جيداً. بطرح الحد الأول من الحد الثاني هنا، نحصل على سالب اثنين، وهذا ما نحصل عليه أيضاً عند طرح الحد الثاني من الحد الثالث. لكن طرح الحد الثالث من الحد الرابع لا يعطينا سالب اثنين. وهذا يؤكد أهمية التحقق من جميع أزواج الحدود المتتالية. تكون المتتابعة هندسية إذا كان ح ن زائد واحد مقسوماً على ح ن يساوي النسبة المشتركة ر. ويجب أن يكون خارج قسمة الحدود المتتالية متساوياً. بقسمة الحدود المتتالية في الخيار (ب)، يكون لدينا ثلث مقسوماً على نصف، وربع مقسوماً على ثلث، نتذكر أن القسمة على كسر هي نفسها الضرب في مقلوبه، فنحصل على النواتج اثنين، هذا يعني أن الخيار (ب) ليس له نسبة مشتركة، إذن فهو ليس متتابعة هندسية. نستنتج أن الخيار (ب) إجابة صحيحة. فلا يمكن تصنيف هذه المتتابعة على أنها متتابعة حسابية أو هندسية. من المهم أن نتحقق إذا ما كانت الخيارات (ج) و(د) و(هـ) تمثل متتابعات هندسية. بقسمة الحدود المتتالية في الخيار (ج)، نحصل على نسبة مشتركة تساوي نصفاً. ومن ثم فهي ليست إجابة صحيحة. بقسمة الحدود المتتالية في الخيار (د)، نحصل أيضاً على نسبة مشتركة، بقسمة الحدود المتتالية في الخيار (هـ)، نلاحظ عدم وجود نسبة مشتركة. لا يمكن تصنيفهما أنهما متتابعات حسابيتان أو هندسيتان. لكن دعونا أولاً نتذكر ما نعنيه بهذين المصطلحين. يشير مجال الدالة إلى مجموعة القيم المدخلة، ويشير المدى إلى مجموعة القيم المخرجة. وعلى عكس الدوال؛ فعند التعامل مع المتتابعات، يجب أن يكون المجال والمدى مجموعتين متقطعيتين من القيم. سيكون ذلك موضحاً على تمثيل بياني. أوجد مدى المتتابعة الحسابية غير المنتهية الممثلة في الشكل الآتي. هل هو (أ) مجموعة القيم الحقيقية كلها؟ (ب) مجموعة الأعداد واحد، (ج) القيم الواقعة في الفترة المغلقة من سالب ثمانية إلى أربعة. (د) مجموعة الأعداد أربعة، (هـ) مجموعة الأعداد أربعة، علمنا من السؤال أن المتتابعة المعطاة هي متتابعة حسابية. ما يعني أن المدى لا بد أن يكون أيضاً غير منته. يمكننا استبعاد

الخيارين (ج) و(د)؛ لأنهما يحتويان على مجموعة منتهية من القيم. إحداثيات النقاط الأربع الموضحة في الشكل هي: واحد، نحن نعلم أن مدى الدالة هو مجموعة القيم المخرجة أو قيم ص. ونجد هنا أنها تساوي أربعة وصفرًا وسالب أربعة وسالب ثمانية، مدى المتتابعة الحسابية غير المنتهية الممثلة في الشكل هو: أربعة، هذا يعني أن الإجابة الصحيحة هي الخيار (هـ). حيث هذه هي مجموعة القيم المدخلة أو قيم س. نعلم أن المدى يجب أن يكون مجموعة متقطعة من القيم. فإنه يمكننا استبعاده. هذا يؤكد أن (هـ) هو الخيار الصحيح. أي المتتابعات الآتية تمثل عدد المثلثات الزرقاء المصمتة في كل حد متتال من النمط؟ هل هي (أ) اثنان، وهكذا؟ (ب) واحد، ما نوع المتتابعة التي نوجدها عند حساب عدد المثلثات الزرقاء المصمتة في النمط السابق؟ في هذا السؤال، ما يعيننا هو عدد المثلثات الزرقاء المصمتة في كل حد. في الحد الأول، من الواضح أن هناك مثلثين أزرقين. وهذا يجعلنا نستبعد مباشرة الخيار (ب)؛ ومن ثم، نستبعد الخيارات (أ) و(د) و(هـ)؛ حتى الآن، في الحد الثالث، وبما أن لدينا ستة أجزاء، فهذا يعطينا إجمالاً ١٨ مثلثاً أزرق. في الحد الرابع، يحتوي كل جزء من الأجزاء المحددة بدوائر على تسعة مثلثات زرقاء، وهو ما يساوي إجمالاً ٤٥ مثلثاً أزرق. وهكذا. في الجزء الثاني من السؤال، مطلوب منا إيجاد نوع المتتابعة الموضحة. أو غير ذلك. نسترجع معاً أن المتتابعة الحسابية لها فرق مشترك بين الحدود المتتالية. ومن الواضح أن هذا لا ينطبق على هذه المتتابعة. المتتابعة الهندسية لها نسبة مشتركة بين الحدود المتتالية. و١٨ مضروباً في ثلاثة يساوي ٥٤، ١٨، ٥٤ لها نسبة مشتركة تساوي ثلاثة. سنلخص الآن بعض النقاط الأساسية التي تناولناها في هذا الفيديو. تكون المتتابعة ح ن حسابية إذا كان ح ن زائد واحد ناقص ح ن يساوي د لجميع الأعداد الطبيعية ن. القيمة د تعرف باسم «الفرق المشترك» أو «أساس المتتابعة». تكون المتتابعة ح ن هندسية إذا كان ح ن زائد واحد مقسوماً على ح ن يساوي ر لجميع الأعداد الطبيعية ن؛ حيث ر هو النسبة المشتركة أو أساس المتتابعة الهندسية. يمكن أن تكون المتتابعات حسابية أو هندسية أو غير ذلك. مجال المتتابعة هو المجموعة المتقطعة من القيم المدخلة، وهي تكون عادة مجموعة أعداد صحيحة موجبة، في حين أن مدى المتتابعة هو مجموعة متقطعة من القيم المخرجة. عند رسم هذه النقاط، على تمثيل بياني،