

Element de logique et methodes de raisonnement avec Exercices Corriges 1. $Z/k(k+1) = 2k^2$, d'où $n^2 - 1 = 4(2k^2) = 8k^2 \Rightarrow n^2 - 1$ est divisible par 8. (P $\Rightarrow$ Q) P $\Rightarrow$ Q P $\Rightarrow$ preuve. Q P $\Rightarrow$ Q P $\Rightarrow$ Q P $\Rightarrow$ Q Q $\Rightarrow$ P 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1. 2. Les quantificateurs. Remarque 1.23.

Remarque 1.25. ELEMENT DE LOGIQUE ET METHODES DE RAISONNEMENT AVEC EXERCICES CORRIGES

Exemple 1.26. $\exists$ etudiant $\exists$ section 1, $\exists$ un groupe sanguin, etudiant a un groupe sanguin. $\exists$ un groupe sanguin O-, $\exists$ l'etudiant de section 1, l'etudiant a O-. Fausse (cela veut dire que tous les etudiants ont le meme groupe sanguin ce qui est peut probable). (b) n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair, par l'absurde : on suppose que n est pair et que n^2 est impaire contradiction (4) Contre exemple Pour montrer qu'une proposition est fausse il suffit de donner ce qu'on appelle un contre-exemple c'est a dire un cas particulier pour lequel la proposition est fausse. L'implication de deux propositions P, Q est notee : $P \Rightarrow Q$ on dit P implique Q ou bien si P alors Q. $P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse, sinon ($P \Rightarrow Q$) est vraie dans les autres cas. (3) Raisonnement par l'absurde Pour montrer que R est une proposition vraie on suppose que R est vrai et on tombe sur une contradiction (quelque chose d'absurde), quand $R : P \Rightarrow Q$ est une implication par l'absurde on suppose que R : R ? Soit P une proposition, la negation de P est une proposition designant le contraire qu'on note (nonP), ou bien $\neg P$, on peut aussi trouver la notation $\neg P$. Voici sa table de verite. Exprimer les assertions suivantes a l'aide des quantificateurs et repondre aux questions : (1) Le produit de deux nombres pairs est-il pair ? $\forall n = 2k$, ainsi $2b^2 = 4k^2$ $b^2 = 2k^2$, on deduit que b est pair aussi or a, b sont premier entre eux contradiction, ce que nous avons suppose au depart est faux c'est a dire ? (2) Methodes du raisonnement par la contraposee Sachant que ($P \Rightarrow Q$) ($Q \Rightarrow P$), pour montrer que $P \Rightarrow Q$ on utilise la contraposee, c'est a dire il suffit de montrer que $Q \Rightarrow P$ de maniere directe, on suppose que Q est vraie et on montre que P est vraie. ($Q \Rightarrow P$) (P Q) 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 8) Proprietes des connecteurs logiques Quelle que soit la valeur de verite des propositions P, Q, R les proprietes suivantes sont toujours vraies. Montrons que $k(k+1)$ est pair on a deux cas : Si k est pair alors $k+1$ est impair donc le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair voir exercice 2 question (3). Si k est impair, alors $k+1$ est pair donc le produit est pair c'est le meme raisonnement, (il faut savoir que le produit de deux nombre consecutifs est toujours pair). (1) La contraposee de : (Il pleut, alors je prends mon para-pluie), est (je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas). Ecrire a l'aide des quantificateurs les propositions suivantes : (1) $P(x)$: La fonction f est nulle pour tous x ? Methodes de raisonnement Pour montrer que ($P \Rightarrow Q$) est vraie on peut utiliser ce qui suit : (1) Methode de raisonnement direct On suppose que P est vraie et on demontre que Q l'est aussi. Par contraposee, on doit montrer que n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair, c'est vrai cas particulier de la question 2), ainsi la proposition n^2 pair $\Rightarrow n$ est pair est verifiee, de plus n pair $\Rightarrow n^2$ est pair $\Rightarrow ?n$? Indiquer lesquelles des propositions suivantes sont vraies et celles qui sont fausses. une proposition est une expression mathematique a laquelle on peut attribuer la valeur de verite vrai ou faux. (1) La negation de : (il pleut, alors je prends mon parapluie), est : (il pleut et je ne prends pas mon parapluie). (1) PQ c'est a dire P n'est pas equivalente a Q lorsque P ; Q ou Q ; P. (2) $P \Leftrightarrow Q$ peut etre lue P si et seulement si Q. Exemple 1.21. Les relations $\exists x, \exists y, P(x, y)$ et $\exists y, \exists x, P(x, y)$ sont differentes, dans la premiere y depend de x tandis que dans la seconde y ne depend pas de x. 122. IR : ($2x + y \neq 0$ et $2x + y = 0$) est fausse car on ne peut jamais avoir ($2x + y \neq 0$ et $2x + y = 0$) en

même temps. Q est fausse si P et Q sont fausses toutes les deux, sinon ($P \Rightarrow Q$) a la même valeur de vérité que ($P \Leftrightarrow Q$), on le voit bien dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

$P(x, y)$ veut dire que x est constante (fixe), il est indépendant de y qui varie dans E . (2) $\exists x \forall y, P(x, y)$ Par contraposition il suffit de montrer que si n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair voir l'exemple précédent. IN, $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie on suit les étapes suivantes : (a) On montre que $P(n_0)$ est vraie, (valeur initiale). Z tel que $n = 2k + 1$ et donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$ il suffit de montrer que $k(k + 1)$ est pair. Toute proposition démontrée vraie est appelée théorème (par exemple le théorème de PYTHAGORE, Thalès...) La négation (non P) , P : Définition 1.4. (1) 2 est un nombre pair et 3 est un nombre premier, cette proposition est vraie (2) $3 = 2$, cette proposition est fausse. On dit que $P \Leftrightarrow Q$ si P et Q ont la même valeur de vérité, sinon ($P \Leftrightarrow Q$) est fausse. Vraie (cela veut dire que chaque étudiant a un groupe sanguin). (b) On suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre n (c) On montre que $P(n + 1)$ est vraie à l'ordre $n + 1$ Alors P est vrai pour tous $n \geq n_0$. IN par l'absurde supposons que n^2 est pair et n est impair, alors $\exists k \exists n$ Ce que nous avons supposé au départ est faux c'est à dire $\neg (n^2 \text{ est pair} \wedge n \text{ est impair})$ Montrons que sa contraposée : (n est impair $\Rightarrow (n^2 - 1)$ est divisible par 8) est vraie. (1) Tout nombre premier est pair, cette proposition est fausse. Q est vraie si P et Q le sont toutes les deux. x n'est pair. (2) P : la fonction f est positive, alors $\neg P$: la fonction f n'est pas positive. Soit P, Q deux propositions 1) La conjonction et, $P \wedge Q$ la conjonction est le connecteur logique et, $P \wedge Q$ est la conjonction des deux propositions P, Q . - ($P \wedge Q$) ELEMENT DE LOGIQUE ET METHODES DE RAISONNEMENT AVEC EXERCICES CORRIGES $P \vee Q$ la disjonction est un connecteur logique ou, $P \vee Q$ (2) La contraposée de : (Omar a gagné au loto $\Rightarrow$ Omar a joué au loto), est : (Omar n'a pas joué au loto $\Rightarrow$ Omar n'a pas gagné au loto). la relation il existe un x tel que $P(x)$ est notée : $\exists x, P(x)$. (1) Tous les étudiants de la section 1 ont un groupe sanguin. IR : $x + y = 0$ est vraie en effet $\exists x \exists y, x + y = 0$ (3) On peut permuter entre deux quantificateurs de la même nature : $\exists x \forall y, P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \exists x, P(x, y)$. (5) Raisonnement par récurrence Pour montrer que $P(n) : n^2 \geq n$ ELEMENT DE LOGIQUE ET METHODES DE RAISONNEMENT AVEC EXERCICES CORRIGES (3) $\forall x \exists y, x + y = 0$ (4) Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair $\{Z\}$ l'ensemble des nombres pairs. $\{Z\}$ l'ensemble des nombres impairs. (4) Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair Par l'absurde montrer que : (1) Exemple 1.2. (2) 1.1.7 82. [0, 1] 102. 1.3.3. (2) $x > 0, y < 0 \Rightarrow x + y > 0$, $x < 0, y > 0 \Rightarrow x + y < 0$, $x < 0, y < 0 \Rightarrow x + y < 0$. (2) (3).